

文章编号:1005-3085(2010)04-0693-06

## 复 Ginzburg-Landau 方程的数值模拟

裴琴娟<sup>1</sup>, 杨忍军<sup>2</sup>, 许秋滨<sup>2</sup>

(1- 常州纺织服装职业技术学院, 常州 213164; 2- 南京审计学院数学与统计学院, 南京 211815)

**摘 要:** 本文对复 Ginzburg-Landau 方程的周期边界问题构造了三个数值格式。其中两个差分格式的精度分别为  $O(\tau^2 + h^2)$ , 谱方法的精度为  $O(\tau^2 + h^m)$ , 其中  $m$  为方程的光滑度。用线性化分析的方法给出了格式的稳定性条件, 并给出了数值实验。数值实验表明, 四阶紧致格式的计算效果最好, 既能达到较高的计算精度又能节省大量的计算时间。

**关键词:** Ginzburg-Landau 方程; 紧致差分格式; 谱方法; 稳定性

**分类号:** AMS(2000) 65N06

**中图分类号:** O241.82

**文献标识码:** A

### 1 引言

复 Ginzburg-Landau 方程 (CGLE) 的动力学性质引起了人们的极大兴趣<sup>[1]</sup>。复 Ginzburg-Landau 方程在许多方面有着重要的应用, 如二维热对流, 半导体激光, 非线性光纤。在大多数应用中, 都用到了此方程的周期边界条件。本文就研究如下形式的 CGLE 方程

$$iu_t + \frac{1}{2}u_{xx} + (1 + iR)|u|^2u = iu, \quad u(a, t) = u(b, t), \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad (1)$$

其中  $x \in [a, b]$ ,  $t \in (0, +\infty)$ ,  $u(x, t)$  为复函数,  $R$  为正实数, 令  $L = b - a$ , 则  $L$  为方程的一个周期。文献 [2] 给出了方程的一些动力学性质, 并对于不同的初值条件画出了方程解的模的图像, 但是没有给出具体的数值格式, 本文的主要工作就是给出了计算此方程的三个数值格式。本文是如下安排的: 在第 2 节给出了两个数值格式, 第 3 节给出了格式的稳定性线性化分析, 第 4 节分析了一下方程的平面波解, 第 5 节给出了数值实验。

### 2 数值格式

取空间步长  $h = (b - a)/M$ ,  $M$  为偶数, 时间步长为  $\tau$ , 则

$$x_j = a + jh, \quad t_n = n\tau, \quad j = 0, 1, \dots, M, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

本文所用的符号如下

$$(u_j^n)_t = (u_j^{n+1} - u_j^n)/\tau, \quad (u_j^n)_{xx} = (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)/h^2,$$

与文献 [1] 类似, 我们把方程 (1) 从  $t_n$  到  $t_{n+1}$  分为两步计算, 首先求方程

$$iu_t + (1 + iR)|u|^2u = 0, \quad (2)$$

再求解方程

$$iu_t + \frac{1}{2}u_{xx} = 0. \quad (3)$$

**格式1** 对方程(2)精确求解, 对(3)用二阶隐式差分格式, 得如下的分裂格式

$$u_j^* = e^{\tau[1+i(1+iR)|u_j^n|^2]} \cdot u_j^n, \\ i(u_j^{n+1} - u_j^n)/\tau + \frac{1}{4}[(u_j^{n+1})_{xx} + (u_j^n)_{xx}] = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, M-1,$$

此格式的精度为  $O(\tau^2 + h^2)$ 。

**格式2** 对(3)用四阶紧致格式<sup>[3]</sup>, 即用算子

$$\left(1 + \frac{h^2}{12}D_x^2\right)^{-1}D_x^2$$

逼近二阶微商算子  $\frac{\partial}{\partial x^2}$ , 得如下格式

$$u_j^* = e^{\tau[1+i(1+iR)|u_j^n|^2]} \cdot u_j^n, \\ i(u_j^{n+1} - u_j^n)/\tau + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{h^2}{12}D_x^2\right)^{-1}D_x^2(u_j^{n+1} + u_j^*) = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, M-1,$$

此格式的精度为  $O(\tau^2 + h^4)$ 。

**格式3** 与文献[1]类似, 我们用谱方法进行计算

$$u_j^* = e^{\tau[1+i(1+iR)|u_j^n|^2]} \cdot u_j^n, \\ u_j^{n+1} = \sum_{l=-M/2}^{M/2-1} e^{-i\mu_l^2\tau/2}\hat{u}_l^* \cdot e^{i\mu_l(x_j-a)}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, M-1,$$

其中

$$\mu_l = \frac{2\pi l}{b-a}, \quad \hat{u}_l^* = \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} u_j^* e^{-i\mu_l(x_j-a)}, \quad l = -\frac{M}{2}, \dots, \frac{M}{2} - 1,$$

此格式的精度为  $O(\tau^2 + h^m)$ ,  $m$  为方程(1)的光滑度。

### 3 格式稳定性的线性化分析

下面我们用线性化的分析方法分析格式的稳定性, 令  $u_j^n = \xi^n e^{ij\theta}$ , 代入格式1得

$$u_j^* = e^{\tau[1+i(1+iR)|\xi^n|^2]} \cdot \xi^n e^{ij\theta}, \\ -\frac{ir}{4}u_{j-1}^{n+1} + \left(1 + \frac{ir}{2}\right)u_j^{n+1} - \frac{ir}{4}u_{j+1}^{n+1} = \frac{ir}{4}u_{j-1}^* + \left(1 - \frac{ir}{2}\right)u_j^* + \frac{ir}{4}u_{j+1}^*,$$

其中  $r = \frac{\tau}{h^2}$ 。因为  $u_j^{n+1} = \xi^{n+1} e^{ij\theta}$ , 代入上式并化简得  $\xi^{n+1} = G_1(\xi, r, \theta)\xi^n$ , 其中

$$G_1(\xi, r, \theta) = e^{\tau[1-R|\xi^n|^2]} \cdot e^{ir|\xi^n|^2} \cdot \frac{1 - \frac{ir}{2} + \frac{ir}{2}\cos\theta}{1 + \frac{ir}{2} - \frac{ir}{2}\cos\theta}.$$

格式稳定的充要条件是  $|G_1(\xi, r, \theta)| \leq 1$ , 得  $e^{\tau[1-R|\xi^n|^2]} \leq 1$ , 即  $|\xi^n|^2 \geq \frac{1}{R}$ , 这与方程自身的性质有关, 与网格比  $r$  无关, 格式 1 绝对稳定。

对于格式 2, 将  $u_j^n = \xi^n e^{ij\theta}$  代入得

$$\begin{aligned} u_j^* &= e^{\tau[1+i(1+iR)|\xi^n|^2]} \cdot \xi^n e^{ij\theta}, \\ \left(\frac{1}{12} - \frac{ir}{4}\right) u_{j-1}^{n+1} + \left(\frac{5}{6} + \frac{ir}{2}\right) u_j^{n+1} - \left(\frac{1}{12} - \frac{ir}{4}\right) u_{j+1}^{n+1} \\ &= \left(\frac{1}{12} + \frac{ir}{4}\right) u_{j-1}^* + \left(\frac{5}{6} - \frac{ir}{2}\right) u_j^* + \left(\frac{1}{12} + \frac{ir}{4}\right) u_{j+1}^*, \end{aligned}$$

因为  $u_j^{n+1} = \xi^{n+1} e^{ij\theta}$ , 代入上式并化简得  $\xi^{n+1} = G_2(\xi, r, \theta) \xi^n$ , 其中

$$G_2(\xi, r, \theta) = e^{\tau[1-R|\xi^n|^2]} \cdot e^{ir|\xi^n|^2} \cdot \frac{\frac{5}{6} - \frac{ir}{2} + (\frac{1}{6} + \frac{ir}{2}) \cos \theta}{\frac{5}{6} + \frac{ir}{2} + (\frac{1}{6} - \frac{ir}{2}) \cos \theta}.$$

我们可以得到与格式 1 相同的结论, 格式的稳定性与方程的自身性质有关, 与网格比  $r$  无关。

对于格式 3, 由 Parseval 定理知

$$\begin{aligned} \|u^{n+1}\|^2 &= (b-a) \sum_{l=-M/2}^{M/2-1} (u_l^*)^2 = h \sum_{j=1}^M |u_j^*|^2 \\ &= e^{2\tau[1-R|\xi^n|^2]} \cdot h \sum_{j=1}^M (\xi^n)^2 = e^{2\tau[1-R|\xi^n|^2]} (b-a) (\xi^n)^2, \end{aligned}$$

我们可得  $(\xi^{n+1})^2 = e^{2\tau[1-R|\xi^n|^2]} (\xi^n)^2$ , 所以我们有与格式 1 和格式 2 相同的结论。

## 4 格式的平面波解

方程 (1) 有如下形式的平面波解, 令

$$u(x, t) = A e^{i(\frac{k\pi x}{p}) + \omega t}, \quad p = \frac{b-a}{2},$$

$k$  为整数, 代入 (1) 得

$$A = \pm \frac{1}{\sqrt{R}}, \quad \omega = -\frac{k^2 \pi^2}{2p^2} + \frac{1}{R},$$

不妨取  $A = \frac{1}{\sqrt{R}}$ , 此时

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{R}} e^{i(\frac{k\pi x}{p}) + \omega t},$$

其离散形式为

$$u(x_j, t^n) = R^{-\frac{1}{2}} e^{i(\frac{k\pi(a+jh)}{p}) + \omega t},$$

我们将其代入格式 1 至格式 3 验证格式的精度。

对于格式 1, 我们有

$$-\frac{ir}{4} u_{j-1}^{n+1} + \left(1 + \frac{ir}{2}\right) u_j^{n+1} - \frac{ir}{4} u_{j+1}^{n+1} = \left[\frac{ir}{4} u_{j-1}^n + \left(1 - \frac{ir}{2}\right) u_j^n + \frac{ir}{4} u_{j+1}^n\right] e^{ir/R},$$

又  $u_j^{n+1} = e^{i\omega\tau} u_j^n$ , 代入上式并作 Taylor 展开得

$$e^{i(\omega - \frac{1}{R})\tau} = 1 - \frac{i\tau k^2 \pi^2}{2p^2} + O(\tau^2 + h^2),$$

所以有

$$\omega = -\frac{k^2 \pi^2}{2p^2} + \frac{1}{R} + O(\tau^2 + h^2),$$

同理对于格式2, 得

$$\omega = -\frac{k^2 \pi^2}{2p^2} + \frac{1}{R} + O(\tau^2 + h^4).$$

对于格式3, 将

$$u(x_j, t^n) = \frac{1}{\sqrt{R}} e^{i(\frac{k\pi(a+jh)}{p} + \omega t)}$$

代入得

$$u_j^* = R^{-\frac{1}{2}} e^{i(\tau/R + \omega n\tau)} \cdot e^{\frac{ik\pi jh}{p}} \cdot e^{\frac{ia k \pi}{p}},$$

$$\hat{u}_l^* = \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} u_j^* e^{\frac{-ilj\pi h}{p}} = \begin{cases} 0, & l \neq k, \\ Ae^{i(\tau/R + \omega n\tau)} \cdot e^{\frac{ia k \pi}{p}}, & l = k, \end{cases}$$

从而有

$$u_j^{n+1} = R^{-\frac{1}{2}} e^{i(\tau/R + \omega n\tau)} \cdot e^{\frac{ik\pi jh}{p}} \cdot e^{\frac{ia k \pi}{p}} \cdot e^{\frac{-ik^2 \pi^2 \tau}{2p^2}},$$

整理得

$$\omega = -\frac{k^2 \pi^2}{2p^2} + \frac{1}{R},$$

平面波解可以精确的满足格式3。

## 5 数值实验

下面我们用数值实验来验证格式的有效性。

### 5.1 平面波解

取  $a = -6$ ,  $b = 6$ ,  $k = 1$ ,  $h = 3/8$ ,  $\tau = 0.05$ ,  $T = 10.0$ , 误差我们定义为

$$L_\infty = \max_j |u_j^n - u(x_j, t^n)|,$$

此时相对误差定义为  $L_1 = L_\infty/A$ , 对于不同的  $R$  计算结果如下表1。

由表1可以看出, 格式一的计算精度是最差的, 但是所用的时间比较少。格式2的精度是非常好的, 当  $R$  比较小时, 甚至可以超过格式3的精度, 但所用的时间与格式1相当。格式3的精度是最好的(当  $R$  较大时), 然而所用时间要比格式1, 格式2大的多。综上所述, 在要求一定精度的情况下, 格式2是最好的, 既能达到较高的精度, 又能耗费少量的时间。

### 5.2 周期解

$$R = 2.0, \quad u_0(x) = R^{-1/2}(1.0 + i \cos x), \quad x \in [0, 2\pi], \quad h = \pi/32, \quad \tau = 0.05,$$

分别用格式2画出  $|u_j^n|$ , 如图1。数值实验5.1和5.2验证了我们的格式的有效性和可靠性。

表 1: 格式 1 至格式 3 的误差比较

$R$	格式	$L_\infty$	$L_1$	cpu-time(s)
0.5	1	6.22(-3)	1.04(-3)	6.0(-3)
	2	1.00(-5)	1.67(-6)	1.0(-2)
	3	5.20(-4)	2.80(-5)	0.19
5.0	1	1.96(-3)	3.27(-4)	1.0(-2)
	2	3.10(-6)	5.16(-7)	1.0(-2)
	3	1.33(-6)	2.21(-7)	0.19
10.0	1	1.39(-3)	2.32(-4)	1.0(-2)
	2	2.19(-6)	3.65(-7)	1.0(-2)
	3	5.80(-7)	9.67(-8)	0.19
15.0	1	1.13(-3)	1.88(-4)	1.0(-2)
	2	1.78(-6)	2.96(-7)	1.0(-2)
	3	4.78(-7)	7.96(-8)	0.18

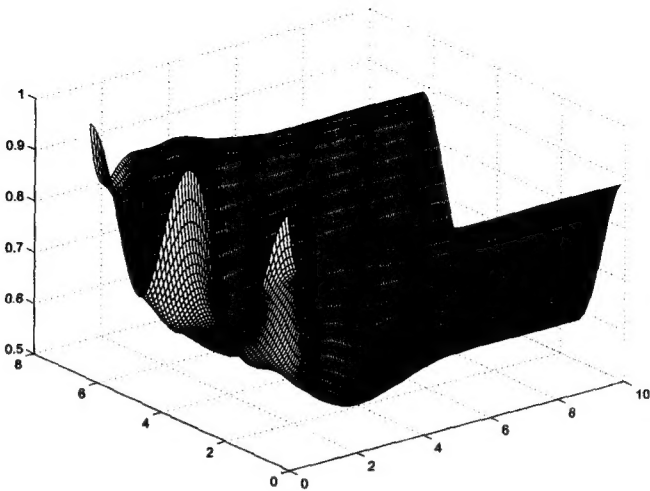


图 1: 格式 2 计算的  $|u_j^n|$

参考文献:

[1] 葛永斌, 田振夫, 吴文权. 二维抛物型方程的高精度多重网格法[J]. 应用数学, 2003, 16(2): 13-18  
Ge Y B, Tian Z F, Wu W Q. A high accuracy multigrid method for the 2-D parabolic equation[J]. Mathematica Applicata, 2003, 16(2): 13-18

- [2] Bao W, Jin S, Markowich P A. On time-splitting spectral approximations for the Schrödinger equation in the semiclassical regime[J]. *Journal of Computational Physics*, 2002, 175: 487-524
- [3] 秦新强, 马逸尘. 对流占优扩散方程的改进特征差分算法[J]. *工程数学学报*, 2002, 19(4): 51-56  
Qin X Q, Ma Y C. A kind of modified characteristic-difference schemes for convection-diffusion equations[J]. *Chinese Journal of Engineering Mathematics*, 2002, 19(4): 51-56
- [4] 黄健, 戴正德. 二维广义 Ginzburg-Landau 方程在 Banach 空间的指数吸引子[J]. *工程数学学报*, 2004, 21(3): 443-447  
Huang J, Dai Z D. Exponential attractor for the derivative two-dimensional Ginzburg-Landau equation in Banach spaces[J]. *Chinese Journal of Engineering Mathematics*, 2004, 21(3): 443-447
- [5] 马逸光, 梅立永, 王何露. 偏微分方程现代数值方法[M]. 上海: 科学出版社, 2006  
Ma Y G, Mei L Y, Wang H L. *Modern Numerical Methods for Partial Differential Equations*[M]. Shanghai: Science Press, 2006

## Numerical Methods for the Complex Ginzburg-Landau Equation

PEI Qin-juan<sup>1</sup>, YANG Ren-jun<sup>2</sup>, XU Qiu-bin<sup>2</sup>

(1- Department of Information Technology, Changzhou Textile Garment Institute, Changzhou 213164;

2- Department of Applied Mathematics, Nanjing Audit University, Nanjing 211815)

**Abstract:** In this paper, three numerical schemes are studied for the complex Ginzburg-Landau equation with periodic boundary conditions. The truncation error of the two difference schemes are  $O(\tau^2 + h^4)$ . The truncation error of the spectral method is  $O(\tau^2 + h^m)$ , where  $m$  denotes the smoothness of the differential equation. The stability of three schemes is analyzed by a linear method, and numerical experiments denote that our schemes are effective and reliable. The computing results demonstrate that the fourth order compact scheme is the best, which can reach a high accuracy with shorter computing time.

**Keywords:** Ginzburg-Landau equation; compact difference scheme; spectral method; stability